Teoria przestrzeni Hilberta
Lista 6 (widmo, operatory normalne)

Zad 1. Niech H, K będą przestrzeniami Hilberta. Pokazać, że dla dowolnego ograniczonego operatora liniowego $A : H \to K$ zachodzi $\|A\| = \sqrt{r(A^*A)}$.

Zad 2. Obliczyć normę operatora $A : (\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{C}^m, \|\cdot\|_2)$, gdy

N	n	m	A	N	n	m	A	N	n	m	A
a)	2	2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	b)	2	2	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	c)	2	2	$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
d)	2	2	$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$	e)	2	3	$\begin{pmatrix} i & i & i \\ i & i & 0 \end{pmatrix}$	f)	2	3	$\begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
g)	3	2	$\begin{pmatrix} e^{it} & 1 \\ 1 & 0 \\ e^{it} & 1 \end{pmatrix}$	h)	3	3	$\begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	i)	3	3	$\begin{pmatrix} i & 1 & i \\ -i & -1 & -i \\ 2i & 2 & 2i \end{pmatrix}$

Zad 3. Pokazać, że operator $A \in L(H, K)$ jest *ograniczony z dołu*, tj. $\exists_{\delta>0}\ \forall_{x\in H}\quad \|Ax\| \geq \delta\|x\|$, wtedy i tylko wtedy, gdy A jest operatorem różnowartościowym z domkniętym obrazem.

Zad 4. Niech $A \in L(H)$ i $\lambda \in \mathbb{C}$. Wykazać, że operator $A - \lambda$ jest nieograniczony z dołu wtedy i tylko wtedy gdy istnieje ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ taki, że $\|x_n\| = 1$ oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \|Ax_n - \lambda x_n\| = 0$.
Ciąg $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy *aproksymatywnym wektorem własnym*, a λ *aproksymatywną wartością własną* operatora A.

Zad 5. Niech $\Pi(A)$ oznacza zbiór aproksymatywnych wartości własnych operatora $A \in L(H)$ (*widmo aproksymatywnie punktowe*) oraz $\Gamma(A)$ zbiór tych $\lambda \in \mathbb{C}$, dla których obraz operatora $A-\lambda$ nie jest gęsty w H (*widmo kompresyjne*).
a) Pokazać, że
$$\sigma(A) = \Pi(A) \cup \Gamma(A) \qquad \text{oraz} \qquad \partial\sigma(A) \subset \Pi(A)$$
b) jeśli $\Pi_0(A)$ oznacza zbiór wartości własnych A (*widmo punktowe*), to
$$\Pi_0(A^*) = \Gamma(A)^* \qquad \text{oraz} \qquad \sigma(A^*) = \Pi(A^*) \cup \Pi(A)^*.$$

Zad 6. Dla dowolnego zwartego $X \subset \mathbb{C}$ podać przykład operatora $A \in L(H)$, dla którego $\sigma(A) = X$.

Zad 7. Udowodnić, że operator $T \in L(H)$ jest normalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\|Tx\| = \|T^*x\|$ dla każdego $x \in H$.

Zad 8. Pokazać, że operator normalny ma następujące własności
a) jądro T pokrywa się z jądrem T^*,
b) obraz T jest gęsty w H wtedy i tylko wtedy, gdy T jest różnowatościowy,
c) T jest odwracalny wtedy i tylko wtedy, gdy jest ograniczony z dołu,
d) x jest wektorem własnym T odpowiadającym wartości własnej λ wtedy i tylko wtedy, gdy x jest wektorem własnym T^* odpowiadającym wartości własnej $\overline{\lambda}$,
e) podprzestrzenie własne odpowiadające różnym wartościom własnym T są prostopadłe.

Zad 9. Wykazać, że idempotent jest operatorem normalnym wtedy i tylko wtedy, gdy jest rzutem ortogonalnym.

Zad 10. Udowodnić, że
a) P jest rzutem ortogonalnym $\iff$ jest operatorem normalnym oraz $\sigma(P) \subset \{0, 1\}$,
b) U jest operatorem unitarnym $\iff$ jest operatorem normalnym oraz $\sigma(U) \subset S^1$,
c) A jest operatorem samosprzężonym $\iff$ jest operatorem normalnym oraz $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.
Pokazać na przykładzie, że $\sigma(U)$ w podpunkcie b) może być dowolnym domkniętym podzbiorem S^1, a $\sigma(A)$ w podpunkcie c) dowolnym zwartym podzbiorem $\mathbb{R}$.

Zad 11. Wyznaczyć widmo operatora A działającego w przestrzeni ℓ_2, gdy

N	A	N	A
a)	$Ax = (x(2), x(3), ...)$	f)	$Ax = (0, x(1), x(2), 0, 0, ...)$
b)	$Ax = (0, x(1), x(2), x(3), ...)$	g)	$Ax = (x(1), x(2), 0, 0, ...)$
c)	$Ax = (\frac{x(1)}{1}, \frac{x(2)}{2}, \frac{x(3)}{3}, ...)$	h)	$Ax = (x(1), x(2), ..., x(n), 0, 0, ...)$
d)	$Ax = (0, \frac{x(1)}{1}, \frac{x(2)}{2}, ...)$	i)	$Ax = (2x(2), 3x(3), 0, 0)$
e)	$Ax = (x(1), 0, x(3), 0, x(5), ...)$	j)	$Ax = (\lambda_1 x(1), \lambda_2 x(2), ...)$, $\lvert\lambda_n\rvert < M$, $n \in \mathbb{N}$